

石田前校長から 10 番目の解答が寄せられました。見落とししていた
 ものです。訂正したいと思います。修正部分は「赤」で表示します。

この問題は ヒントにあるように $\frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{5} \cdots \frac{1}{19} \frac{1}{20}$ を複
 数個組み合わせて、その和が 1 になる組み合わせを探せば良い
 ことになります。

まず準備として、 $\frac{1}{\infty}$ を複数個の和で表すことを用意しておきます。

$$\frac{1}{2} \text{ は } \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{2+1}{6} = \boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} \text{ ですね。}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \text{ は } \frac{1}{3} &= \frac{4}{12} = \frac{3+1}{12} = \boxed{\frac{1}{4} + \frac{1}{12}} \\ &= \frac{3+2+1}{18} = \boxed{\frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18}} \\ &= \frac{5+3+2}{30} = \boxed{\frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}} \end{aligned}$$

3 種類の表し方があります。

$$\begin{aligned} \text{同様に } \frac{1}{4} &= \boxed{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}} = \boxed{\frac{1}{5} + \frac{1}{20}} \\ \frac{1}{6} &= \boxed{\frac{1}{9} + \frac{1}{18}} = \boxed{\frac{1}{10} + \frac{1}{15}} \end{aligned}$$

となります。次に

$$\text{例えば } 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} + \boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} \text{ だから}$$

3と6と さらに3と6を分解した分数を用いて

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$$

分母6を用いない形として

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$$

他の分母で表すときに、一度使った数は使えませんので、組み合わせ方に注意する必要があります。

ここまで一度整理して使った分母のみ抜き出してみると

解① (3, 4, 6, 9, 12, 18)

解② (3, 4, 6, 10, 12, 15)

解③ (3, 4, 9, 10, 12, 15, 18) の3通りです。

次に

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \text{ と考えて}$$

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} \text{ 同様にして}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$$

また、分母4をつかわない形として

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$$

ここで $\frac{1}{6} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$ を用いて

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{12} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$$

となるので

解④ (3, 4, 5, 6, 20)

解⑤ (3, 4, 5, 9, 18, 20)

解⑥ (3, 4, 5, 10, 15, 20)

解⑦ (4, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 20)

解⑧ (3, 5, 6, 9, 12, 18, 20)

解⑨ (3, 5, 9, 10, 12, 15, 18, 20)

解⑩ (3, 5, 6, 10, 12, 15, 20)

以上の10通りの組み合わせが見つかりました。

結構、あるものですね。

これは倍数、約数の関係にあるものか、そうでない(つまり素数)場合で随分違ってきますね。検討としては分母30もでてきましたが、他の場合ももしかすると存在するのかもしれませんが。

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \text{ の場合も調べてみましたが、上のパターン}$$

以外はないように思います。でも全く別の組み合わせで 和=1 となる場合があるかもしれません。私もまだ検討中で、10の組み合わせが最終解答かどうか自信ありません。また、別の組み合わせが探

し出せたら知らせてくださいね。皆さんの中には180の約数を考えて・・・という方法がありました。ここからの解法も良いかもしれません。(60の約数で考えた方もありましたが、この場合は分母の9, 18がはずれてしまいます)。個人的感想ですが、私は分数を分解して考えていく方が良いように思います。

2022年Vo.3は、ある意味「力業(ちからわざ)」！？の問題でしたね。粘り強く考える、面倒と思わずにチャレンジしてみるということも問題を解く上で大切なことではないかと思っています。

今年がこれが最終です。次年度また会いましょう。